PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

Calculer l'intégrale $J_{\alpha,\beta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|t-x|}{\alpha}+\frac{|t|}{\beta}}\, dt$

où α , β , x sont des nombres réels donnés avec $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$.

Pour quelles valeurs des nombres α , β l'intégrale est-elle convergente? Peut-on avoir $\beta = \alpha$? Peut-on avoir $\beta = -\alpha$?

II

Soit E l'ensemble des fonctions f à valeurs complexes, définies et continues sur $\mathbf{R}$ et qui vérifient la condition :

$$\forall \lambda > 0 \quad : \lim_{|x| \to +\infty} e^{-\frac{|x|}{\lambda}} |f(x)| = 0$$

1° Si f est une fonction à valeurs complexes, définie et continue sur $\mathbf{R}$, et qui vérifie la condition : $\forall \mu > 0$, $\exists m > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$: $|f(x)| \leqslant m\, e^{\frac{|x|}{\mu}}$; montrer que l'on a $f \in \mathrm{E}$.

2° Réciproquement soit $f \in \mathrm{E}$ et μ un nombre positif donné ($\mu > 0$) ; en utilisant le fait que: $e^{-\frac{|x|}{\mu}} |f(x)|$ est borné sur tout intervalle borné $[-\mathrm{A} , +\mathrm{A}]$, montrer que $\forall \mu > 0$, $\exists m > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}$: $|f(x)| \leqslant m\, e^{\frac{|x|}{\mu}}$.

3° Montrer que E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{C}$.

Les fonctions polynômes appartiennent-elles à E?

Le produit de deux fonctions de E appartient-il à E?

4° Pour quelles valeurs du nombre complexe ω la fonction $x \longmapsto e^{\omega x}$ appartient-elle à E?

5° Justifier l'existence du nombre $\|f\|_\rho$, défini, pour $\rho > 0$ et toute fonction f de E , par l'égalité

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbf{R}} \left(e^{-\frac{|x|}{\rho}} |f(x)| \right)$$

Montrer que la condition $\|f\|_\rho \leqslant 0$ implique $f = 0$.

Montrer que l'on a $\|cf\|_\rho = |c| \cdot \|f\|_\rho$ pour $c \in \mathbf{C}$ et $f \in \mathrm{E}$.

Montrer que l'on a $\|f_1 + f_2\|_\rho \leqslant \|f_1\|_\rho + \|f_2\|_\rho$ pour f_1 et $f_2 \in \mathrm{E}$.

III

Soit $f \in \mathrm{E}$, $\alpha > 0$. On pose

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-t|}{\alpha}} f(t)\, dt.$$

1° Montrer que l'intégrale est absolument convergente pour tout x réel.

2° Montrer que l'on peut écrire

$$g(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}} \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\, dt + e^{\frac{x}{\alpha}} \int_{x}^{+\infty} f_2(t)\, dt$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions que l'on explicitera.

En déduire que la fonction g est continue pour tout x réel.

Montrer que l'on a $g \in \mathrm{E}$.

Soit T_α l'application qui fait correspondre à toute fonction f de E la fonction g , soit $g = \mathrm{T}_\alpha f$. Montrer que T_α est un endomorphisme de E.

3° Soit $\rho > \alpha$. Montrer qu'il existe une constante c telle que

$$\forall f \in \mathrm{E} \quad : \quad \|\mathrm{T}_\alpha f\|_\rho \leqslant c \|f\|_\rho .$$

IV

1° Soit $g=T_\alpha f$, $(f\in E)$. Montrer que la fonction g est dérivable et expliciter la dérivée g' à l'aide d'intégrales.

Montrer que l'on a $|g'|\leqslant\frac{1}{\alpha}T_\alpha|f|$, c'est-à-dire que pour tout x réel $|g'(x)|\leqslant\frac{1}{\alpha}T_\alpha|f|(x)$.

2° Montrer que la fonction g possède une dérivée seconde et que l'on a $g-\alpha^2g''=2\alpha f$.

Les fonctions g' et g'' appartiennent-elles à E ?

3° Montrer que si la fonction f possède une dérivée f' qui appartient à E on a $g'=(T_\alpha f)'=T_\alpha f'$.

V

1° Soit f une fonction donnée de E. Montrer que $g=T_\alpha f$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y-\alpha^2y''=2\alpha f$$

qui appartienne à E.

2° Soit g une fonction donnée de E et possédant une dérivée seconde appartenant à E.

Montrer qu'il existe une fonction f de E, et une seule, telle que

$$g=T_\alpha f.$$

3° Montrer qu'il existe un polynôme Q et un seul qui vérifie l'équation différentielle $y-\alpha^2y''=P$ où P est un polynôme donné.

Exprimer Q à l'aide de P et de ses dérivées d'ordre pair.

4° Déterminer les nombres k tels qu'il existe une fonction f, non nulle, de E vérifiant l'égalité

$$T_\alpha f=kf.$$

VI

1° Soient f_1 et f_2 des fonctions de E à valeurs réelles.

Montrer que la condition $f_1\geqslant f_2$ implique $T_\alpha f_1\geqslant T_\alpha f_2$ (c'est-à-dire que si $\forall x\in\mathbf{R}$: $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ alors on a

$$\forall x\in\mathbf{R} \quad : \quad T_\alpha f_1(x)\geqslant T_\alpha f_2(x)).$$

2° Soit g une fonction de E à valeurs réelles et ayant une dérivée seconde appartenant à E.

Montrer que si g vérifie la condition $g\geqslant kg''$, où k est un nombre positif donné, on a $g\geqslant 0$.

3° Soient $\alpha>0$, $\beta>0$ et $\alpha\neq\beta$. Montrer qu'il existe deux constantes A, B telles que

$$T_\beta\circ T_\alpha=AT_\alpha+BT_\beta.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail